Universitat de Lleida

Universitat de Lleida
Institut de Ciències de l'Educació

Introducció a la física

clàssica, relativista i quàntica

Andreu Arbó-Trabado

Autor

Andreu Arbó Trabado – aarbo@xtec.cat

Amb el suport de:

Universitat de Lleida
Vicerectorat d'Estudiants

Generalitat de Catalunya
Departament d'Ensenyament

Índex

Incís i agraïments:

Aquests apunts són una síntesis molt breu dels apunts de la matèria *Fonaments de Física* de l'antiga llicenciatura de matemàtiques impartida pel Dr. Grifols, el Dr. Calsamiglia i el Dr. Masjuan del departament de Física de la Universitat Autònoma de Barcelona (curs 2004-2005).

He d'agrair l'especial atenció i dedicació que han tingut aquests tres professors en la matèria; gràcies a professors com ells els alumnes se senten estimulats i més receptius a les noves idees que la física moderna ens aporta. No crec que existeixi cap altra manera millor d'ensenyar aquestes noves teories de la física moderna que xoquen al inici.

Aquests apunts han estat pensats per alumnes de 2n de batxillerat o 1r de carrera de modalitats científiques o tecnològiques.

Introducció

La física és la ciència que estudia el comportament de la naturalesa. Inicialment la física estudiava el comportament de les estrelles, planetes i dels cossos en la terra; podríem anomenar d'aquests estudis a Kepler, Galileo,... però especialment aquesta física va ser descrita amb tot d'èxit per Sir. Isaac Newton; un anglès molt peculiar.

La vida de Newton és molt interesant de llegir; només dir que era un creient atemorit per Déu i la major part de la seva biblioteca (que encara és conserva) era de "sabers" que ara no és consideren ciència (alquímia, astrologia, teologia...). Aquesta primera part de la física l'anomenem física clàssica.

No obstant, la física no només estudia el moviment dels cossos, també estudia el moviment i comportament de tot allò que no veiem. Ja els romans coneixien la idea d'electricitat, però no va ser fins el segle XVI que és va iniciar l'estudi d'aquestes fons. A més és va poder relacionar l'electricitat amb el magnetisme, també conegut pels romans gràcies al a propietat de certs materials com l'imant (dels àrab: pedra que atreu el ferro). Al segle XVIII és van unir les dues ciències creant l'electromagnetisme; és la primera senyal d'una física unida i única que pot explicar-ho tot.

Podem nombrar d'aquesta part de la física als científics Otto von Guericke, Georg S. Ohm, André-Marie Ampère, Charles-Agustin Coulomb, Alessandro Volta...

Però en el segle XX gràcies a científics d'alt nivell com Einstein, Rutherford, Schrodinger, ..., volent descobrir una teoria conjunta, van revisar totes les hipòtesis inicials de la física i les van qüestionar. Les lleis de Galileu i l'absolutisme del temps és van veure com una aproximació de la realitat i gràcies a aquestes noves troballes és va poder passar de la física clàssica a la mecànica relativista.

La gran física d'aquell segle no només va ser la relativitat, també es va estudiar la vibració interna dels cossos i el moviment peculiar que tenen els electrons. Aquest estudi ha desenvolupat la física quàntica; una física on la nova eina utilitzada fou l'estadística (fins aquell moment mai utilitzada en la física).

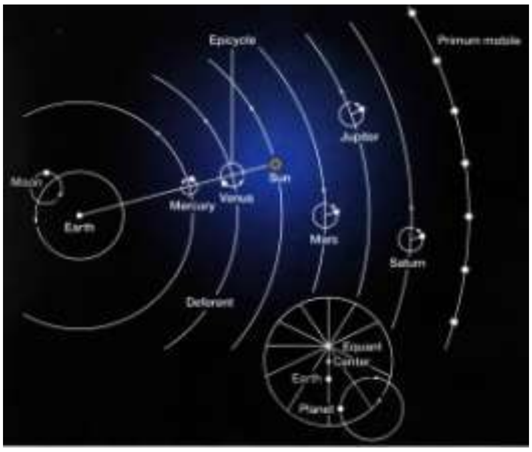
Aquests apunts desenvoluparem inicialment la mecànica clàssica, passarem immediatament a la física relativista i finalment introduirem la quàntica. No és faran grans demostracions, sinó que serà més una introducció teòrica d'aquests mons.

Mecànica clàssica

Sistemes de referència

Imagina't per un moment que estàs assentat en un banc d'un parc. Fixem-nos en el moviment d'un cotxe, que segueix un carrer recte a una velocitat constant. Segons el teu punt de vista el cotxe segueix el moviment que he descrit. Però reflexiona! Segons el conductor (tot i saber que és ell que es mou) ell està parat i tu ets el que et mous a la velocitat que porta el seu cotxe però en sentit contrari. Però encara podríem complicar la cosa. Si en aquell moment passa per sobre un avió podríem intentar descriure el moviment del cotxe a partir dels observadors d'aquell avió; està clar que aquesta descripció seria més difícil matemàticament, però podríem fer-la...

Així doncs, tot moviment és pot descriure des de qualsevol punt de vista, el problema és que la descripció serà més complicada.



Històricament això passava amb la descripció del moviment dels planetes. Inicialment es creia que la terra era plana i estava al centre del sistema solar; per explicar el moviment dels planetes no hi havia prou amb el cicles normals de les estrelles fixes, és van introduir epicicles, i encara així no eren exactes els càlculs, per això es van introduir epicicles dels epicicles; i tot i així encara no eren exactes... Quan Kepler va introduir les seves tres lleis i l'origen de coordenades fou el Sol, els càlculs és van simplificar molt.

Aquest punt de vista en física es diu **origen** i es necessari sempre per descriure un moviment. Però no només tenim prou amb l'origen per descriure un moviment, per dir on es troba en cada moment fixat que has de dir la seva alçada, la seva profunditat i la seva distància... Pensa-ho un moment, en el nostre espai sempre necessitem tres nombres per dir on es troba cada objecte. Però a més els objectes es mouen, per tant hem d'introduir un paràmetre més, **el temps**.

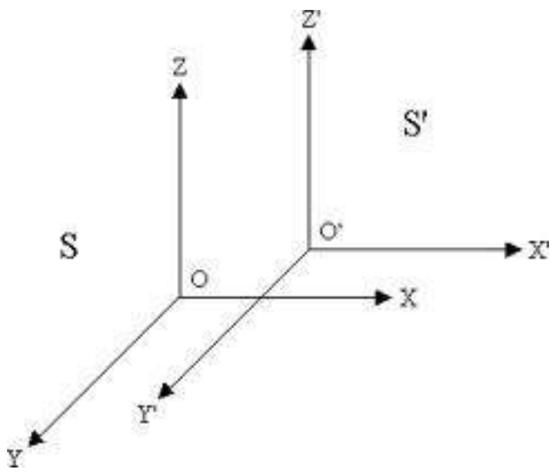
Per tant, ara ja ho podem dir, anomenem **sistema de referència** al conjunt de nombres $\mathcal{S}_1 = \{\vec{O};\, \mathfrak{B}\}$ on $\mathfrak{B} = \{\vec{t};\, \overrightarrow{v_1},\, \overrightarrow{v_2},\, \overrightarrow{v_3}\}$ és una base on els tres vectors $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ ens donen la posició en l'espai i el primer, $\vec{t}$, ens dona en quin moment estem (el temps); $\vec{O}$ és l'origen de coordenades (on està el observador normalment).

Sistemes de referència inercials

Com hem explicat inicialment, hi ha "punts de vista" que descriuen més fàcilment un moviment que no pas un altre sistema de referència.

Aquests sistemes de referència s'anomenen inercials. Matemàticament podem demostrar que tot moviment és pot descriure amb un **s.r. inercial**. És més, existeix un s.r. inercial molt conegut per nosaltres on la seva base és de vectors ortonormals, aquest sistema s'anomena sistema cartesià: $\mathcal{S}_0 = \{\vec{o};\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k};\, \vec{t}\}$, on $\vec{O} = (0,0,0)$, $\vec{\imath} = (1,0,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$ i $\vec{t} = t$.

Tot i haver-ho expressat a $\mathbb{R}^3$ podríem expressar-ho tot conjuntament a $\mathbb{R}^4$. En aquests sistemes de referència el moviment té una velocitat constant i rectilínia.



Observem que existeixen infinits sistemes de referència inercials. Si canviem el origen de les coordenades canvia el sistema de referència, però sempre que aquest nou origen porti una velocitat constant referent al primer, el sistema seguirà sent s.r. inercial.

Unitats i trajectòria

Cal introduir un sistema de mesures per poder parlar de distància. El sistema internacional d'unitats fixa el metre com a unitat de longitud. El segon com a unitat del temps. Amb aquestes dues podrem definir altres unitats derivades (o secundaries).

Abans de descriure les unitats derivades, parlem de la **partícula lliure**. En la física clàssica tots els càlculs es fan sobre una partícula sense volum i lliure de forces externes. És cert que en la realitat no existeix la partícula lliure, la gravetat i les altres forces universals sempre influeixen una força sobre qualsevol cos. Però idealment ens anirà molt bé descriure els moviments sobre una partícula d'aquesta mena.

Doncs bé, la **trajectòria** d'una partícula és el conjunt (infinit normalment) de nombres a $\mathbb{R}^3$, és a dir, l'espai, on en cada instant t es troba la nostra partícula (normalment aquesta funció és continua). Matemàticament podem trobar una funció de variable t on ens descrigui aquest conjunt $\vec{r}(t) = \left(x(t),\ y(t), z(t)\right)$.

Podríem preguntar-nos si podem treure algunes propietats d'aquesta funció respecte el temps. La resposta és afirmativa.

La **velocitat** és el ritme de la trajectòria d'una partícula per unitat de temps. Ve descrita per $\vec{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$; la seva unitat és m/s i és fàcil demostrar que aquesta és la derivada de la posició respecte el temps: $\frac{\delta \vec{r}(t)}{\delta t}$.

L'**acceleració** és el ritme de canvi de la velocitat $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$; la seva unitat és m/s^2 i en descriu la curvatura de $\vec{r}(t)$. Per tant podem dir que és pot calcular com $\frac{\delta \vec{v}(t)}{\delta t}$ o bé $\frac{\delta^2 \vec{r}(t)}{\delta^2 t}$.

Observació: la trajectòria d'un cos bé donat per una funció o un conjunt de funcions, aquestes poden dependre de la variable temps o de les variables espai.

Definim aquí el que és un ***Joule***, és la unitat d'energia en el sistema internacional i és defineix com: $1\,J = 1kg\ x\ \left(\frac{1m}{1s}\right)^2$. Ja veurem més endavant com lliguem el moviment amb aquesta energia.

Definim un **Newton** com la unitat de força en el sistema internacional i és igual: $1\ N = 1kg\ x\ 1\frac{m}{s^2}$. Podeu observar com $1\,J = 1N/s$.

Energia cinètica i moment lineal

"Ja hem dit que com la partícula lliure és l'objecte més senzill que podem trobar, aplicarem la majoria dels nostres estudis sobre aquesta partícula. En cursos superiors podrem demostrar que aquesta demanda no modifica els resultats verdaders."

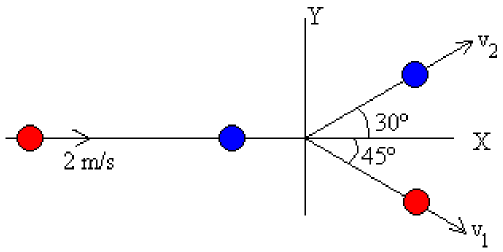
Sabem per les lleis de Newton que si una partícula té una certa velocitat constant, aquesta partícula seguirà un Moviment Rectilini Uniforme. El que ens podem pregunta és, què passarà si li barrem el pas? Podem recuperar aquest moviment?

La resposta intuïtivament ja la sabem, aquest cos té una *energia* dins que produirà calor o deformació sobre el cos que li barra el pas.

Definim aquesta energia com **energia cinètica** i és proporcional a la seva massa m i la seva velocitat v: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

Però que passa amb el xoc? Existeix alguna mesura sobre aquest fet? La resposta és que existeix una proporció entre la massa i la velocitat constant:

Definim **moment lineal** d'una partícula com $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$



Aquesta magnitud dinàmica, el moment lineal, és invariable (és transfereix). Així doncs en un sistema de partícules que xoquen és conserva; i.e:

Proposició: La suma dels moments lineals inicials d'un sistema de partícules és igual a la suma de moments lineals finals del sistema.

Energia potencial

Incís: Tots sabem que l'aigua emmagatzemada en una presa pot generar energia elèctrica. El fet és que al caure d'una certa altura guanya velocitat que fa girar una bobina i aquesta genera electricitat.

Així doncs fixem-nos bé, l'aigua a guanyat energia cinètica gràcies a la caiguda. Però l'energia només es transforma, per tant, aquesta energia ja la tenia anteriorment a la caiguda. I sabem que ens la dóna la gravetat.

Però hi ha altres maneres d'aconseguir velocitat, com per exemple al disparar la bala d'un *pinball* (al deixar anar la molla). Així doncs anem per feina i a definir aquesta nova "energia".

Definim l'**energia potencial** com aquella energia emmagatzemada o produïda per la interacció entre una partícula i una força externa.

En el cas de la molla tenim **energia potencial elàstica** i per la llei de Hook podem obtenir $E_{pE} = \frac{1}{2}K \cdot r^2$, on K és la constant elàstica de la molla i r la contracció de la molla (es pot argumentar el per què d'aquesta constant i el $1/2$ estan separats).

En el cas de la gravetat obtenim **energia potencial gravitatòria** $E_{pG} = m \cdot g \cdot h$, on m és la massa del cos, $g \approx 9{,}81 m/s^2$ l'acceleració de la gravetat i h l'altura.

I en el cas de partícules elèctriques obtindríem **energia potencial elèctrica**. D'aquestes dues últimes ja farem un estudi més profund.

Conservació de l'energia: energia mecànica

De forma empírica sabem que l'energia ni és crea ni és destrueix, sinó que és transforma. Aquest **principi de conservació de l'energia** és un cas particular del **primer principi de la termodinàmica**. Simplement excloem fenòmens que produeixin pèrdues de calor, quelcom impossible a la realitat.

Aquests principis per tant ens donen una nova forma de treballar i calcular el moviment dels cossos. Ens està dient que si sumem les energies del cos sempre és conserven (això vol dir que tindríem que sumar energies calorífiques, cinètiques, gravitatòries...).

Així doncs definim l'**energia mecànica** com una constant en un sistema que conservi la calor i és la suma de l'energia cinètica i la suma d'energies potencials: $E_M = E_c + \sum E_p$.

I gràcies al principi de la conservació d'energia (per ser exactes, en absència d'energies no conservatives) podem dir: $\Delta E_M = 0$

La *Lagrangiana*

Anem a introduir una nova magnitud amb les energies potencial i cinètica. Sabem que la quantitat anomenada energia mecànica es conserva durant l'evolució del sistema i tot això ho hem pogut deduir intuïtivament.

Definim la ***Lagrangiana*** com la resta de les energies conegudes: $L(v, x) = E_c - E_p$. Aquesta nova magnitud depèn de la velocitat i la posició (podríem dir que només de la posició, ja que la velocitat és una derivada de la posició).

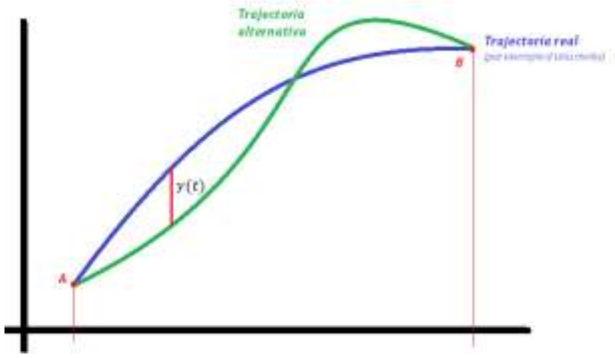
Aleshores, la $L(v, x)$ és un valor de com repartides estan les energies d'un sistema.

Què simbolitza l'integral de la *Lagrangiana*? Sabem que l'integral d'una corba és l'àrea per sota d'aquesta. És a dir, físicament ens donaria la eficiència de la trajectòria: com menys àrea per recórrer un sistema millor.

Definim l'**acció d'una trajectòria** com $S = \int_a^b L\,dt$ on a és la posició inicial i b la final en l'estudi.

Anem a deduir l'equació del moviment, per fer-ho cal tenir en compte que tot moviment segueix un trajectòria d'acció mínima (és a dir, per dir-ho senzillament, les trajectòries són els recorreguts més eficients), aquest fet és un principi fonamental anomenat també **Principi de Hamilton**.

Els càlculs següents surten una mica de la introducció que és pretén donar en aquests apunts però són útils per un futur acadèmic més científic, per això he cregut oportú incloure'ls.



Sabem que $L = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - E_p(x)$ aleshores:

Considerem una trajectòria alternativa a la real: $x(t, \alpha) = x_r(t) + \alpha \cdot \gamma(t)$ on x_r és la trajectòria real i $\gamma(t)$ és la desviació de l'alternativa (això sí, comença i acaba on comença i acaba x_r).

Així doncs obtenim per cada α totes les trajectòries alternatives a la real. Però pel principi d'acció mínima sabem que per $\alpha = 0$ ha de complir $\frac{dS}{d\alpha} = 0$.

$$S(\alpha) = \int_a^b \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{dx(t,\alpha)}{dt}\right)^2 - E_p \, dt \xRightarrow{' = \frac{d}{dt}}$$

$$S(\alpha) = \int_a^b \frac{1}{2} \cdot m \cdot (x_r'(t) + \alpha \cdot \gamma'(t))^2 - E_p \, dt \implies$$

$$S(\alpha) = \int_a^b \frac{1}{2} \cdot m \cdot x_r'(t)^2 + m \cdot x_r'(t) \cdot \alpha \cdot \gamma'(t) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \alpha^2 \cdot \gamma'(t)^{\,2} - E_p \, dt$$

**

Fem servir una aproximació per l'energia potencial (anomenada sèries de Taylor):

$$E_p\big(x(t)\big) = E_p\big(x_r(t) + \alpha \cdot \gamma(t)\big) \approx E_p\big(x_r(t)\big) + \alpha \cdot \gamma(t) \cdot \frac{dE_p}{dx}$$

**

$$S(\alpha) = \int_a^b \frac{1}{2} \cdot m \cdot x_r'(t)^2 + m \cdot x_r'(t) \cdot \alpha \cdot \gamma'(t) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \alpha^2 \cdot \gamma'(t)^{\,2} - E_p\big(x_r(t)\big) - \alpha \cdot \gamma(t) \cdot \frac{dE_p}{dx} \, dt$$

Com que $\frac{dS}{d\alpha} = 0$ per $\alpha = 0$ obtindrem:

$$(\alpha = 0) \quad \rightarrow \quad \frac{dS}{d\alpha} = \int_a^b m \cdot x_r'(t) \cdot \gamma'(t) - \gamma(t) \cdot \frac{dE_p}{dx} \, dt = 0 \text{ ***}$$

Integrant per parts el primer terme de la sumat saben que $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$ podem obtenir:

$$\text{***} \ \frac{dS}{d\alpha} = \int_a^b -m \cdot x_r''(t) \cdot \gamma(t) - \gamma(t) \cdot \frac{dE_p}{dx} \, dt = 0 \implies$$

$-\int_a^b (m \cdot x_r''(t) + \frac{dE_p}{dx}) \cdot \gamma(t) \, dt = 0$ Com que ha de ser vàlid per tota trajectòria alternativa tenim que:

$m \cdot x_r''(t) + \frac{dE_p}{dx} = 0$. Aquesta equació s'anomena **equació del moviment** que ha de complir tota trajectòria real.

Si reformulem l'equació del moviment en funció a la lagrangiana obtenim: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}$. És a dir, només ens cal conèixer la lagrangiana d'un sistema mecànic per saber la seva trajectòria. Aquesta funció ens serà molt útil més endavant a la relativitat de cursos superiors.

La Força i el treball

Tots sabem o interpretem que volen dir les dues paraules del títol. Però hem de establir una definició rigorosa per utilitzar-la bé a la física (per no complicar la notació suposarem els moviments en una sola direcció).

A l'equació del moviment $m \cdot x''(t) + \frac{dE_p}{dx} = 0$ sabem perfectament que la primera part vol dir $x''(t)$ acceleració (derivar dos cops la trajectòria respecte t). Però que vol dir la segona?

Doncs bé, definim $-\frac{dE_p}{dx}$ com **la força** que actua sobra la partícula estudiada. Ja vam dir, quan vam definir E_p, que eren les energies d'interacció externa (per això el signe negatiu).

Per tant si substituïm cada part de l'equació del moviment obtenim la **segona llei de Newton**: $F = m \cdot a$

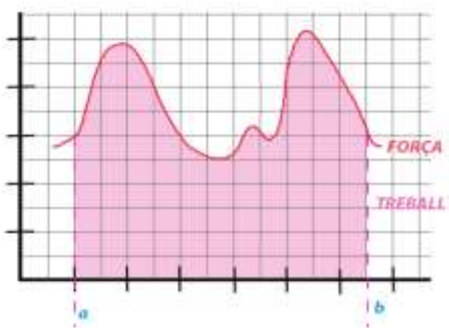
Observem que la llei de Hook també té coherència: $E_{pE} = \frac{1}{2}Kx^2 \rightarrow -\frac{dE_p}{dx} = -kx$ i empíricament podem demostrar que coincideix amb la força (animem al lector a demostrar-ho al laboratori).

Observem també que passa si apliquem l'equació del moviment a la conservació de l'energia mecànica:

$$\frac{dE_M}{dt} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m \cdot v^2 + E_p\right] = 0 \quad \leftrightarrow$$

$m \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{\partial E_p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad \leftrightarrow \quad m \cdot v \cdot a - F \cdot v = 0$ d'on obtenim un altre cop la segona llei de Newton.

Així doncs ja entenem que vol dir la força físicament, és la variació de les energies potencials.



Què vol dir el treball? És defineix el ***treball, W***, que fa una força sobre una partícula per desplaçar-la des d'un punt a a un punt b com l'àrea sota la corba de la força, i.e: $W = \int_a^b F\, dr$.

Per com hem definit la força podem deduir:

$W = \int_a^b F\,dr = -\int_a^b \frac{\partial E_p}{\partial r}\,dr = \Delta_a^b E_p$, és a dir el treball d'una força F sobre una partícula que segueix una trajectòria $r(t)$ entre els punts a i b és la diferència d'energies potencials entre aquests dos punts.

Proposició: El treball d'una força conservativa és independent del recorregut. Només depèn del inici i final d'aquest.

Demostració: Suposem dos camins sobre una mateixa partícula per desplaçar-la des d' a fins a b; podem dir-los r_1 i r_2. La diferència de treballs serà:

$$\oint_{r_1}^{r_2} F\,dr = \int_a^b F\,dr_{r_1} - \int_a^b F\,dr_{r_2} = \Delta_a^b E_p - \Delta_a^b E_p = 0$$

Aleshores: $\int_a^b F\,dr_{r_1} = \int_a^b F\,dr_{r_2}$ (Sota forces conservatives el treball és independent del camí escollit).

Per finalitzar aquest punt dos enunciats:

Proposició: En presencia de forces no conservatives (les dissipatives); el treball d'aquestes forces és igual al increment d'energies mecàniques.

Teorema de Köning: En absència de forces externes, el treball de la força resultant és la variació de l'energia cinètica.

Forces fonamentals de la natura

En aquest punt recordarem quines són les quatre forces fonamentals de la naturalesa. És oportú fer-ho per entendre bé el que a partir d'ara farem. A la física l'objectiu primordial és la recerca de la veritat i la senzillesa i és per això que convé recordar alguns punts.

Força gravitatòria: És una de les forces més dèbils de la naturalesa, però no obstant la més intensa i palpable de totes. És una força atractiva que produeix un cos amb massa. Crea una deformació en l'espai-temps relacionat amb la seva massa. El camp gravitatori que genera compleix: $\vec{g} = -G\frac{M}{d^2}\vec{u}$ on M és la massa del cos que el genera, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot \frac{m^2}{kg^2}$ és la constant de gravitació universal, d és el mòdul des d'on volem calcular el camp i $\vec{u}$ és tot vector unitari que té com a centre la partícula i està col·locat a distància d.

Força electromagnètica: Són forces més intenses que les gravitatòries, poden ser atractives o repulsives i és produeixen tant en repòs com en moviment. S'ha demostrat que tot camp elèctric pot produir un camp magnètic i viceversa; per això s'ha pogut unir les dues en una sola força.

Força nuclear forta: Són les que subjecten i mantenen unit els neutrons i protons del nucli de qualsevol àtom, són molt intenses a distàncies molt curtes però de curt abast.

Força nuclear dèbil: Són les causants de la desintegració dels nuclis i són les menys intenses de les quatre.

Les quatre forces creen un **camp de forces** al seu voltant homogeni i que és va degradant amb la distància. La que més utilitzarem en aquests apunts és la gravitatòria.

Conservacions a l'espai

Des de l'inici d'aquests apunts, segur que podeu trobar algun cop la paraula espai-temps. Però com és que lliguem aquestes dues unitats? És que estan lligades?

La resposta és afirmativa i estendrem aquest punt més endavant. Però abans enunciar dos postulats fonamentals en la física.

Homogeneïtat del temps i de l'espai: El temps i l'espai són homogenis. Tots els instants i punts són físicament equivalents.

Això vol dir que si tens un sistema tancat (lliure de forces externes) i fas un experiment aquest és comportarà igual ara que d'aquí mil i un anys i també és comportarà igual aquí que a la lluna o a Andròmeda.

A més a més, l'espai és isòtrop, és a dir, en un sistema tancat la evolució dinàmica d'aquest no pot dependre de l'orientació del sistema de referència. Això s'anomena **isotropia de l'espai**.

Gràcies aquest fet podem derivar respecte t la lagrangiana i obtenir l'enunciat que vam escriure fa unes pàgines: L'**energia mecànica** d'un sistema tancat és constant: $\Delta E_M = 0$.

També podem derivar la lagrangiana respecte la trajectòria (l'espai també és homogeni). Això en porta a $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\sum_i \vec{p_i}}{dt} = 0$; és a dir, que el **moment lineal total** d'un sistema és conserva.

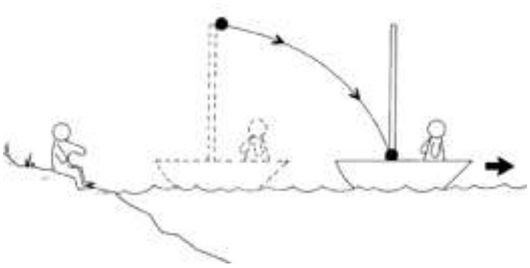
Podem definir **moment angular** total d'un sistema com $\vec{M} = \sum_i \vec{r_i} x \vec{p_i}$ on $\vec{r_i}$ és la distància de la partícula i, i $\vec{p_i}$ el moment lineal d'aquesta partícula. També podem deduir que és manté constants (el càlcul per arribar aquests resultat implica el producte mixt de vectors i per tant aconsellem al lector que intenti demostrar-ho en cursos superiors).

Mecànica relativista

Les transformacions de Galileu

Ben segur, si has viatjat amb avió o en tren i si podem treure les vibracions causades per les pertorbacions i alteracions en els rails de tren, hauràs pogut comprovar empíricament que si el tren no sofreix una acceleració; és a dir, si va a velocitat constant, no podem percebre que hi ha moviment. No obstant això, el vehicle sí que és mou i des del punt de vista extern podem comprovar-ho.

Podem posar un altre exemple. En aquest precís moment tu estàs viatjant a $465 m/s$, ja que la *Terra* està girant sobre el seu eix a aquesta velocitat. És més, està corrent a casi $3000\, m/s$ al voltant del *Sol*. I encara més, el *Sol*, i la *Terra* i tu en particular, viatgen a $22000 m/s$ al voltant de la galàxia Via Làctia...

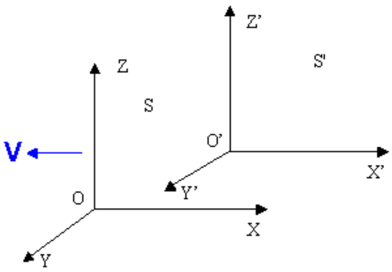


Com és que no notem aquestes velocitats? La resposta la va donar Galileo Galileu, i podem formular-ho de la següent forma: Entre tot sistema de referència amb velocitat constant entre ells el temps és absolut.

Proposició: No existeixen velocitats absolutes, en les equacions dels moviments no hi ha cap dependència de la velocitat del sistemes de referència amb el que descrivim el moviment. En conclusió, no podem detectar el **moviment absolut**.

Lema: totes les lleis de la mecànica clàssica són iguals en tots els sistemes de referència inercials. És a dir, les equacions d'un moviment són iguals en qualsevol sistema de referència inercial.

Anem a deduir les equacions per transformar les dades en un sistema de referència a un altre de inercial al primer.



Podem agafar el temps que sigui absolut, és a dir, el temps al primer sistema sigui igual al temps del segon sistema. Res ens fa pensar que això pugui ser diferent. $t_1 = t_2 \equiv t$

Si la velocitat entre el primer sistema de referència i el segon és $\overrightarrow{v_{12}}$ per passar de la posició del primer al segon tindrem que fer: $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{v_{12}} \cdot t$

Exemple: Suposa que puges a un tren al últim vagó. Un company teu és queda a l'andana i respecte nosaltres està inicialment a $r_1 = 0m$. Si el tren va a una velocitat constant de $v = 15m/s$. Observa que per $t = 0$ nosaltres estem a $r_2 = 0\,m$ i també $r_2 = 0m$. Al cap de $t = 1s$ el nostre company està a $r_1 = 0 + 15 \cdot 1 = 15m$, al cap de $t = 2$ $r_1 = 0 + 15 \cdot 2 = 30m$ ... Per tant el nostre company s'allunya de nosaltres, però observa que per ell som nosaltres que ens allunyem...

Transformacions de Galileu: $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{v_{12}} \cdot t$ i $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{a_{12}} \cdot t$

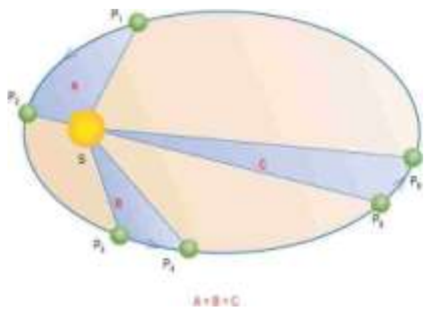
Principi de Galileu: Les lleis de la mecànica clàssica són invariants sota transformacions de Galileu.

Aquest principi ens diu que qualsevol moviment és igual en qualsevol altre sistema de referència inercial (no podem saber quina velocitat portem respecte un altre observador).

Dem: Hem de demostrar que la Lagrangiana és independent de sistemes de referència diferents però inercials.

Recordem: Les lleis de Kepler és poden demostrar amb les transformacions de Galileu, amb la fórmula de Newton i la Lagrangiana. No obstant requerim d'eines matemàtiques avançades. Recordem les tres lleis de Kepler:

1. Tots els planetes descriuen òrbites el·líptiques (i per tant planes).
2. Les àrees que descriuen els planetes amb un cert període són iguals; i.e, per un cert temps t, l'àrea que ha descrit el planeta quan està molt prop del Sol és la mateixa de quan està lluny del Sol.
3. El quadrat del període orbital d'un planeta és proporcional al cub del semieix dels seus focus.



Anem a demostrar la tercera que diu que les orbites són proporcionals al cub del radi que les separa del Sol.

Suposem que el planeta *P* es mou amb una trajectòria circular $\rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Aquesta seria la seva equació del moviment (és pot fer per una el·líptica qualsevol, la diferència serà de constants).

Segons la llei de la gravitació universal les variables segueixen:

$$\begin{cases} m_P \cdot x'' = -G \cdot \frac{m_S \cdot m_P}{r^3} \cdot x \\ m_P \cdot y'' = -G \cdot \frac{m_S \cdot m_P}{r^3} \cdot y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'' = -G \cdot \frac{m_S}{r^3} \cdot x \\ y'' = -G \cdot \frac{m_S}{r^3} \cdot y \end{cases} \rightarrow **$$

Apliquem un canvi de variable a polars, i.e.: $\begin{cases} x = \mathrm{r} \cdot \cos(\theta) \\ y = \mathrm{r} \cdot \sin(\theta) \end{cases}$ on $\theta(t) = \omega \cdot t$ és una variable que depèn del temps i ens indica on es troba cada moment el planeta *P* i ω per tant és la velocitat angular. Derivem dos cops per poder substituir a **

$$\begin{cases} x' = -r \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \\ y' = r \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'' = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) \\ y'' = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$$

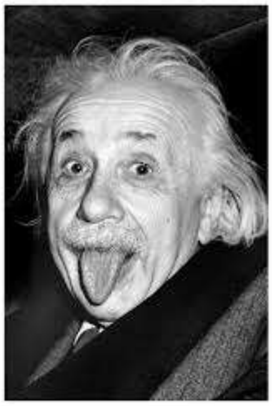
Aleshores: ** $\rightarrow \begin{cases} -r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) = -G \cdot \frac{m_s}{r^3} \cdot r \cdot \cos(\omega t) \\ -r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) = -G \cdot \frac{m_s}{r^3} \cdot r \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \omega^2 = G \cdot \frac{m_s}{r^3} \\ \omega^2 = G \cdot \frac{m_s}{r^3} \end{cases}$ Com que el període d'una orbita és $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, podem concloure:

Les òrbites són proporcionals al radi, de la constant G i a la massa del Sol (de la estrella atractora).

Relativitat espacial

Fins ara no hem trobat cap restricció de velocitat, no existeix segons la cinemàtica ni la física clàssica i tampoc la dinàmica una velocitat límit.



Però parem-nos un moment a pensar. Les forces d'atracció i repulsió són instantànies? Les forces universals ja estan predeterminades? Què passa amb la llum? Podem trobar algun experiment que demostri que la llum i la seva velocitat tenen un comportament peculiar?

A principis del segle XIX, Albert Einstein volia unificar dues grans branques de la física. La mecànica clàssica per una banda i per l'altra l'electromagnetisme.

En l'electromagnetisme s'havia trobat la velocitat de la llum, des d'ara c. Les lleis de l'electromagnetisme ja es van posar en dubte el segle anterior i van superar moltes barreres, així que Einstein va començar a buscar algun principi "erroni" en la mecànica clàssica (tot això mentre estava treballant a una empresa de patents).

Així doncs la primera afirmació que podem fer és que existeix una **velocitat constant universal** i aquesta és $c \approx 299.792.458\ \mathrm{m/s}$; i.e., per molt que portis una velocitat v_1 respecte a un altre cos, si el segon cos encén un raig de llum la velocitat que passarà el raig pel teu costat és c (ignorant moviments relatius). Això ho va dir Einstein per poder seguir aplicant totes les lleis de la física en tots els sistemes de referència sense que hi hagués cap mena de contradicció.

En conseqüència, Einstein va postular els següents resultats:

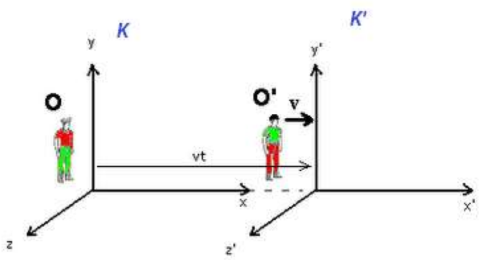
Primer postulat de la relativitat espacial: La velocitat de la llum en el buit és sempre c, independentment del moviment de la font i/o de l'observador (és independent del sistema de referència).

Segon postulat de la relativitat espacial: Les lleis de la física són iguals en tots els sistemes de referència inercials.

Transformacions de Lorentz i l'espai temps

Recordem les transformades de Galileu: $t = t'$ i $r = r' + v \cdot t$; és a dir, per dos observadors, el temps sempre és el mateix pels dos, i el moviment d'una partícula depèn de la velocitat entre ells dos. És a dir, si un està al terra i l'altre sobre un cotxe a $60km/h$ constants, la variació la produirà aquesta velocitat.

Aquesta fórmula, lineal, és molt pràctica per calcular i trobar les funcions del moviment. Al mateix temps és molt intuïtiva. Per no perdre aquestes dues bones propietats podríem dir: $\Delta t = \Delta t'$ i $\Delta r = \Delta r' + v \cdot \Delta t$



Posant els increments encara són certes la homogeneïtat del temps i l'espai. Bé, anem a mirar que en podem extreure de tot plegat:

Suposem que en un cert sistema de referència, K, un objecte es troba en $(t_1;\ x_1, y_1, z_1)$ (fixat que estem posant quatre dimensions per què afegim el temps). Aquest mateix objecte en un altre sistema de referència, K', es troba a $(t_1';\ x_1', y_1', z_1')$. Així que el mateix objecte o el mateix coneixement té dues formes d'expressar-se tot i ser únic (bé, per ser exactes podríem dir que té infinites formes de representar-se).

Suposem que l'objecte és mou i ara té les coordenades $(t_2;\ x_2, y_2, z_2)$ i $(t_2';\ x_2', y_2', z_2')$ en cada sistema de referència. Quina relació hi ha entre les coordenades de K i les de K'? (per simplificar els càlculs farem els càlculs sobre l'eix OX, no pas en el y, ni en el z).

Com que volem linealitat i ens preguntem quina relació hi ha entre totes les coordenades d'un sistema i amb les del altre sistema de referència, obtindríem:

$\begin{cases} x = Ax' + B \cdot c \cdot t' \\ c \cdot t = C \cdot x' + D \cdot c \cdot t' \end{cases}$, observem que per tenir coherència al temps l'hem multiplicat per una velocitat per obtenir espai i igualar espai amb espai; hem escollit la velocitat per el fet de que hem posat com a hipòtesis que la velocitat de la llum no és sueprable.

En el cas de les transformacions de Galileu $A = 1$; $B = \vec{v}/c$; $C = 0$; $D = 1$. Observem que per ara no estem demanant res més que una relació entre les coordenades de cada sistema de referència i linealitat.

Anem a trobar les constants:

La partícula des del sistema K segueix una trajectòria per x des de $x = 0$; però des de K' ve donada per $x' = -v \cdot t$ on v és la velocitat que va l'origen de K' respecte el de K.

Aleshores $0 = -A \cdot v \cdot t' + B \cdot c \cdot t' \to B = \frac{A \cdot v}{c}$ obtenint $\begin{cases} x = A\left(x' + \frac{v}{c}\,ct'\right) \\ ct = Cx' + Dct' \end{cases}$

Ara utilitzem el primer postulat. Si un raig de llum surt de $(0,0,0,0)$ com que c és universal podem dir:

$c^2\,t^2 - x^2 = 0$ i $c^2t'^2 - x'^2 = 0$ és a dir $c^2\,t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \quad \to$

$$C^2x' + Dct' - A^2\left(x' + \frac{v}{c}ct'\right) = c^2t'^2 - x'^2 \quad \to$$

$$(C^2 - A^2)x'^2 + \left(D^2 - \frac{v^2}{c^2}A^2\right)c^2t'^2 + 2\left(CD - \frac{A^2v}{c}\right)x'ct' = c^2t'^2 - x'^2 \quad \to$$

$$\begin{cases} C^2 - A^2 = -1 \\ C^2 - \dfrac{v^2}{c^2}A^2 = 1 \\ CD - \dfrac{v}{c}A^2 = 0 \end{cases}$$

Obtenim si resolem aquest sistema d'equacions: $\begin{cases} A = D = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ C = v/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{cases}$

Aleshores: $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \boldsymbol{ct} = \dfrac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$

Aquestes equacions són les **transformacions de Lorentz**.

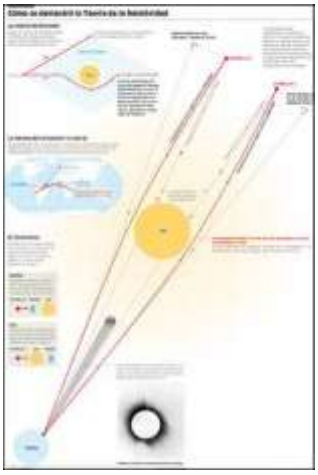
Observa: Per una velocitat petita comparada amb la de la llum, les transformacions de Galileu són una aproximació molt bona de les transformacions de Lorentz

L'espai temps: Fixat que hem utilitzat tota l'estona una relació entre temps i espai (per fer-ho hem tingut que multiplicar per la velocitat de la llum). Fent-ho així hem deduït les equacions de Lorentz. Així doncs, no tenim que tenir cap problema alhora de utilitzar un vector de quatre coordenades per identificar un esdeveniment: $(\boldsymbol{ct}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

Definició: L'interval entre dos esdeveniments és la quantitat:

$$s_{21} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$$

Paradigmes del nou espai-temps



Anem a estudiar una mica més les transformacions de Lorentz i a deduir que impliquen.

Abans, però cal dir que aquestes fórmules de Lorentz no és van poder demostrar empíricament fins al 1919. És va poder demostrar amb un eclipse de Sol, va durar un segon menys del que tenia que durar i a més és va veure la mateixa estrella dos cops... però tots quests fets ja els explicarem més endavant.

Relativitat de la simultaneïtat

Suposem dos esdeveniments simultanis en el temps, $\Delta t = 0$ però no en l'espai, $\Delta \vec{r}$. I suposem que tenim dos sistemes de referència inercials, k i k'.Què ens diu Lorentz?

$$\Delta \vec{r}' = \frac{\Delta \vec{r}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \neq 0 \; ; \; \Delta t' = \frac{\frac{-\vec{v}}{c^2}\Delta \vec{r}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \neq 0$$

Observem doncs que amb la relativitat dos esdeveniments simultanis a un sistema de referència poden ser no simultanis vist des d'un altre sistema de referència. Només són simultanis a dos sistemes de referència diferents si.i. passen al mateix lloc.

Dilatació del temps

Considerem ara un esdeveniment en k i que és mou respecte el sistema de referència K a una velocitat constant $\vec{v}$. Si surten al mateix temps $t = t' = 0$, al cap d'un cert temps, pel sistema de referència k estarà a $\vec{r} = \vec{v} \cdot t$.

Què val ara el temps per t'? Per Lorentz obtenim: $t' = t\sqrt{1 - \frac{\|\vec{v}\|^2}{c^2}}$

Observem que l'arrel és més petita que 1, aleshores podem deduir que un objecte que és mou en un sistema de referència amb una certa velocitat el seu temps és més curt.

Definició: Anomenem **temps propi** d'un objecte al temps que marca un rellotge solidari amb l'objecte en el sistema de referència del mateix objecte. És denota com τ

Aquest temps és invariant respecte tots els sistemes de referència: si $\Delta \mathrm{r} = 0$

$$s^2 = c^2 t'^2 = c^2 t^2 - v^2 t^2 \quad \rightarrow \quad s^2 = c^2 \tau^2 \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{s}{c}$$

Contracció de Lorentz

Definició: Anomenem **longitud pròpia** a la longitud que té un objecte en un sistema de referència en repòs.

Amb les transformacions de Lorentz podem arribar a $\Delta r' = \frac{\Delta r}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ on el denominador és no nul i més petit que zero, què vol dir això? Un objecte en repòs té menys "volum" que en moviment; és a dir, amb el moviment la longitud és contrau.

Un viatge per l'espai-temps

Definició: Observem que un any-llum és una unitat de distància no pas de velocitat o de temps. $v = Dc/t$ on $v \equiv \{velocitat\}$, $D \equiv \{anys\_llum\}$, $t \equiv \{temps\}$ (normalment és fa en dies quan parlem d'anys llum).

Observem: Sabem que $t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow t' = \frac{Dc}{v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow$

$$t'^2 = \frac{D^2 c^2}{v^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \rightarrow \left(\frac{c}{v}\right)^2 = \frac{t'^2 + D^2}{D^2} \rightarrow \frac{v}{c} = \frac{D}{\sqrt{t'^2 + D^2}} < 1$$

Exemple: Suposem que volem anar a una estrella a 150 anys llum d'aquí. Si viatgem a la velocitat de la llum, segons la física clàssica tardaríem 150 anys. Quan tardaríem segons la relativitat si viatgem al 98% de c? $t' = \frac{150 \cdot 1}{0{,}98}\sqrt{1 - \frac{0{,}98^2}{1^2}} \approx 30\ anys$

Només hauran passat 30 anys per nosaltres, tot i que pels de la terra hauran passat 150.

El nou espai-temps

Cronometrarem el temps a la xarxa de l'espai temps amb un raig lluminós des del punt $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ (l'origen). Quan passi $1s$ tots els observadors que estiguin a $300000km$ aproximadament començaran a contar. A $2s$ començaran els de $600000km$ ...

Experiment:

Estem a K amb un coet. Anem de K a K'.

Emetem cada minut un senyal per tal que cada sistema de referència que estigui entre K i K' guardin el temps passat.

Podem obtenir la velocitat instantània d'un moment. Per un instant $[i; i+1]$ obtenim:

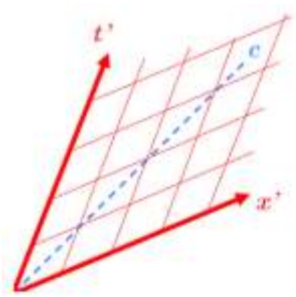
$s_{i,i+1}^2 = c^2\Delta^2 t' \ \rightarrow \ \Delta t' = \frac{s_{i,i+1}^2}{c}$ Aleshores és invariant el temps, és igual mirar-ho des de K o K'.

$c^2 \cdot \tau^2 = c^2\Delta^2 t - \Delta^2 x < c^2\Delta^2 t$ És a dir el temps passat pel coet és menor que el temps que ha passat per un cos estàtic.

Definició: Diem que dos esdeveniments estan **connectats físicament** si existeix un instant on el primer esdeveniment pot afectar al segon.

Observem que tot esdeveniment a una distància superior a un any llum no està connectat amb nosaltres (és impossible superar c).

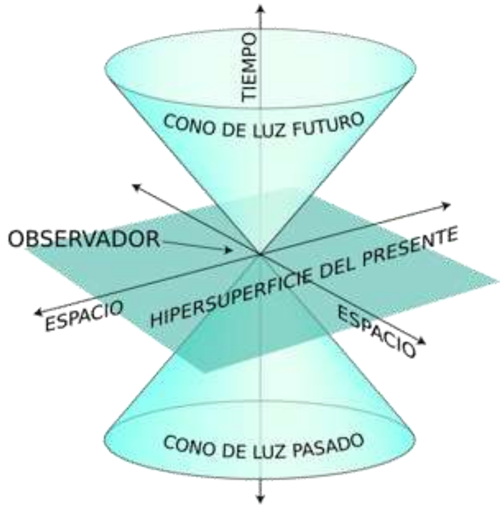
Proposició: Comparem esdeveniments connectats, no connectats i els simultanis:



- Si $ct > x \ \Longrightarrow \ 0 < c^2t^2 - x^2 = c^2{t'}^2{x'}^2 > 0 \ \Longrightarrow \ c't' > x'$
- Si $ct < x \ \Longrightarrow \ 0 > c^2t^2 - x^2 = c^2{t'}^2{x'}^2 > 0 \ \Longrightarrow \ c't' < x'$
- Si $ct = x \ \Longrightarrow \ 0 = c^2t^2 - x^2 = c^2{t'}^2{x'}^2 = 0 \ \Longrightarrow \ c't' = x'$

Aquesta proposició ens ajuda a definir el **con de llum**: Si tresem la recta $x = ct$ i creem el con de revolució obtenim les tres zones desitjades (subespais amb intersecció nul·la que formen l'espai-temps).

- La bora del con són tots els esdeveniments connectats amb el nostre sistema de referència i per tant són els connectats directament. Distingim el present, és a dir el punt $(0;\ 0,0,0)$. Els esdeveniments de sobre serien els esdeveniments de futur i els de sota (temps negatiu) serien el passat. S'anomena **interval tipus llum**.
- La zona interna del con són aquells esdeveniments connectats i per tant possibles. En aquesta zona podem distingir esdeveniments connectats en el present, en el futur o en el passat. S'anomena **interval tipus temps** i **esdeveniments connectats físicament.**



- La zona externa del con són aquells esdeveniments impossibles de connectar i per tant mai podran estar connectat físicament. Si $s^2 > 0$ no podem trobar cap $SRI\ K'$ en que els 2 esdeveniments passin simultàniament. S'anomena **interval tipus espai**.

Proposició:

- Si $ct > 0 \ \Rightarrow ct' > 0 \ \Rightarrow$ futur absolut.
- Si $ct < 0 \ \Rightarrow ct' < 0 \ \Rightarrow$ passat absolut.

Dinàmica relativista

Anem a buscar aplicacions bijectives tal que siguin absolutes, i.e. siguin iguals per a tot sistema de referència inercial.

Per dir-ho d'alguna manera, volem trobar l'equivalència amb la mecànica clàssica de l'equació de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$.

Fixem dos esdeveniments connectats físicament; un inicial i a t_0 i un de final f a t_1. Recordem que vam definir l'acció d'una trajectòria que va d'i a f com $S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt$ on L és la Lagrangiana.

Anem a relacionar l'acció amb el temps propi dels esdeveniments de la forma més senzilla: $\tau = \frac{s}{c} \implies d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$. Aleshores: $S = K \cdot \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$ on K és una constant que tindrem que determinar. Aplicant el Principi de Mínima acció i fent uns quants càlculs d'anàlisi podem obtenir que la constant és $k = -mc^2$

Corol·lari: La Lagrangiana és $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Proposició: L'acció d'un esdeveniment amb la relativitat és $S = -mc^2 \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$.

Moment lineal i energia

Recordem: Vam definir el moment lineal com $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ aleshores tenim que:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Observem: per $v \lll c$ les fórmules de la mecànica clàssica són una aproximació molt bona a la que ens dóna les fórmules de la relativitat.

Recordem: $E = \vec{p}.\vec{v} - L$ aleshores a la relativitat és: $E = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v} + mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ per tant: $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Incís: una aproximació molt bona a l'expressió anterior de l'energia (en cursos superiors veureu que és un desenvolupament per sèries de Taylor de l'arrel).

$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$ on i reconeixem la energia cinètica però apareix un terme que desconeixem. Aquest terme és l'energia en repòs de la partícula; aquest fet és sorprenent i xoca profundament amb la mecànica clàssica.

Això vol dir que un cos amb repòs té energia i és exactament $E = mc^2$. A tots ens sona, veritat? És la famosa fórmula d'Einstein, però fixeu-vos que és una simplificació de l'energia quan el cos està en repòs.

L'equació de Newton relativista: Sabem que $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ aleshores $\vec{F} = m\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)'$

Mecànica quàntica

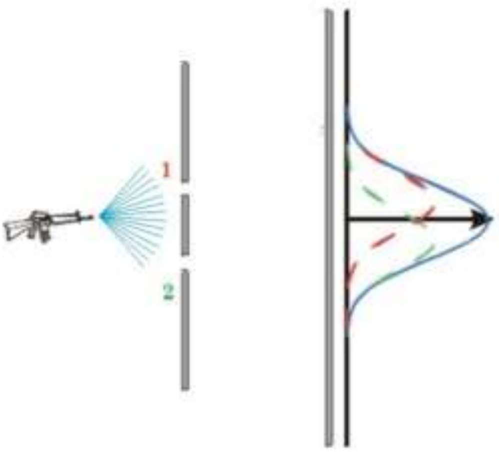
Al igual que conèixer el funcionament d'una cèl·lula o inclús el d'una neurona no et diu res del comportament humà però t'ajuda a comprendre el funcionament de la vida, l'estudi macroscòpic com hem fet fins ara ens ajuda a saber com funcionen les coses que podem percebre a simple vista però no ens explica el funcionament de les coses més sotils i quotidianes.

Una nova física va despertar arran de l'estudi de la física microscòpica. Aquest estudi minuciós és el que va desenvolupar la quàntica. Aquests apunts reflectiran una introducció aquest univers microscòpic.

Incís: Abans que res, com que hi ha moltes coses que no podrem imaginar o no seran intuïtives anem a posar-nos a lloc. Imaginat un punt sobre la recta real. El punt, només pot anar endavant i endarrere i per tant només pot veure en aquestes dues direccions. No obstant un dia arriba una circumferència que viu al pla i passa per sobre la recta. El punt la veu en un instant i de repent desapareix i poca estona després apareix darrera d'ell; el punt no pot explicar la realitat de la circumferència en el seu món i no pot imaginar un món superior, però el pla existeix. El mateix li passarà a la circumferència amb una esfera i el mateix ens passa a nosaltres amb el món quàntic.

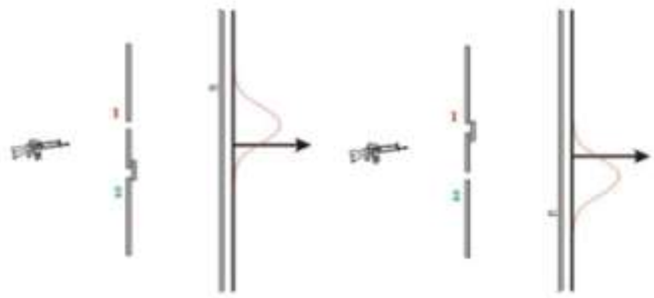
Partícules i el seu comportament

Anem a estudiar un experiment abans d'entrar en la matèria de la quàntica. Suposem que tirem bales contra una paret de forma continuada (10 bales per segon per exemple).

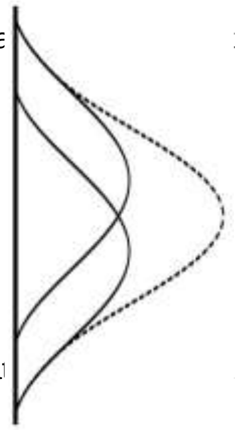


Així doncs, des d'un punt anem disparant amb un cert angle d'obertura com és veu a la figura. A la paret imaginat que hi ha dos forats i darrera de la paret hi ha una placa amb sensors que compta les bales que van a parar a cada punt de la placa.

Al final de l'experiment obtindrem una gràfica on ens dirà en quins punts han xocat més bales i en quins punts n'han xocat menys. Com és veu a la dreta del dibuix anterior.



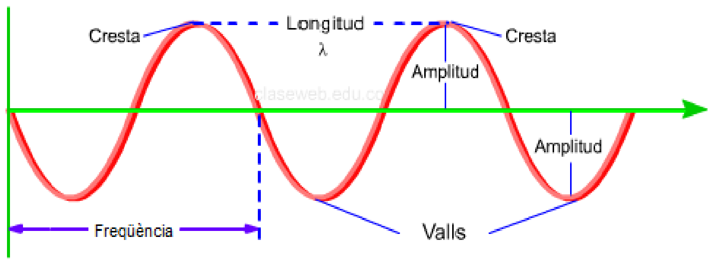
Aquesta gràfica si fa o no fa semblarà una normal estàndard centrada al mig dels dos forats (en realitat semblaria una binomial perquè és discret el nombre de dispars, no continu com la normal). Però que passa si tapem un forat?



La resposta és que obtindrem una corba semblant però desplaçada plegat, és que si sumem les dues gràfiques dels detectors d'obstruir un dels forats obtindrem la gràfica dels dos forats oberts.

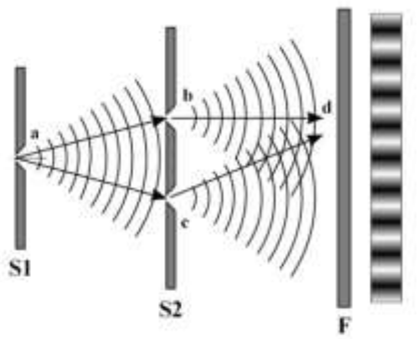
És curiós però lògic, ja que amb els dos forats oberts totes aquelles bales que xoquen just al marge del forat rebota cap al centre dels dos forats i en canvi quan no hi ha dos forats l'esquerra o dreta de l'únic que hi ha obert.

Ones i el seu comportament



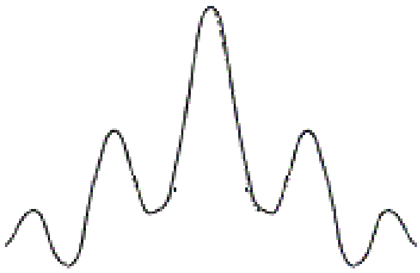
Anem a procedir com el punt anterior però estudiarem el efecte d'una ona. Podríem fer aquest experiment amb ones sonores, de llum o simplement d'un fluid com l'aigua que li vas tirant pedretes. Les ones és desplacen diferent a les partícules, van propagant-se amb una certa freqüència en el medi que és troben.

Doncs pensem amb el nostre experiment, però ara amb ones. Disparem una ona des d'un punt i xoca contra una paret amb dos forats. Les ones entren per aquests forats produint ones secundaries que travessen pels forats.



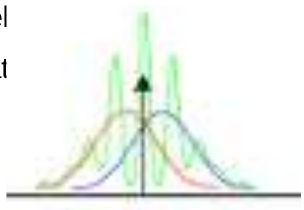
Al trobar-se ones que venen d'un forat amb ones que venen de l'altre, tots sabem que produiran interferències per la diferència de fase i per tant hi haurà interferències destructives i constructives. Per tant podríem obtenir la imatge que tens a l'esquerra.

Ara observem la gràfica resultant i resulta (la gràfica on recollim el nombre de cops que una ona dóna contra la paret amb sensors). No és una campana de Gauss com amb les partícules, té pics i valls (deguts a les interferències destructives i constructives què produeixen les ones).



Fem l'experiment de tapar cada forat i repetir el procediment. Obtindrem, aquí sí, una gràfica molt semblant amb l'experiment de les partícules, és a dir, obtindríem una campana de Gauss desplaçada a la dreta o a l'esquerra segons el forat que tapem.

És d'esperar que la suma de les dues gràfiques individuals sigui la gràfica de les dues ranures obertes? Doncs no, degut a les interferències destructives i constructives, la suma de les gràfiques del experiments individuals no correspon a la gràfica dels dos forat oberts.

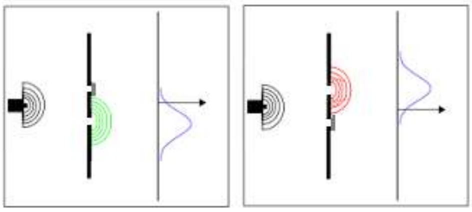


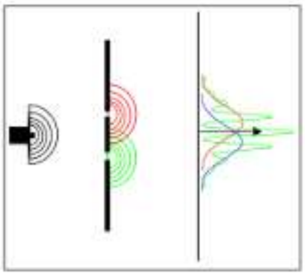
Això ens fa pensar que un fenomen és pot propagar com partícula o com a ona, però no amb les dues formes alhora.

Primer experiment quàntic

Anem a posar els punts sobre les «i's». Volíem construir una teoria que expliques el món "nanoscòpic" i dins d'aquest món trobem els e^- (electrons). Què passarà si fem el mateix experiment amb e^-?

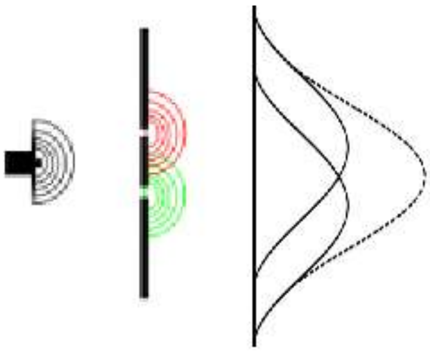
Posem un canó d'electrons davant una superfície amb dos escletxes i darrera d'aquesta un detector d'electrons. Comencem a tirar electrons contra la superfície però amb una sola ranura oberta i recollim les dades obtingudes pel detector i les plasmem sobre una gràfica on en l'eix d'abscisses hi ha la posició en el detector i en l'eix d'ordenades el nombre d'e^-'s que hi ha xocat. El resultat de la gràfica és com en els casos anteriors, una normal estàndard desviada cap a la dreta o l'esquerra (Bé, no ens estranya aquests resultats, eren d'esperar).





Ara fem l'experiment amb les dos escletxes obertes i anotem també els resultats del detector sobre una gràfica on l'eix d'abscisses hi ha la posició en el detector i en l'eix d'ordenades el nombre d'e^-'s que hi ha xocat.

Obtenim el mateix resultat que quan "jugàvem" amb ones. Així doncs els e^-'s es comporta com una ona! Com pot ser això? Ens ha de desconcertar ja que nosaltres estem tirant e^-'s d'un en un, com pot ser que un "únic" e^- és pugui comportar com una ona? Per comportar-se com una ona tindria que haver-hi interferències entre "altres" "electrons" (ja veurem que en realitat les alteracions són dels camins del mateix electró).



Bé, no ens posem nerviosos. Posem a sobre de cada escletxa un detector per saber que passa en aquells punts. Repetim l'experiment amb aquests dos nous detectors i el resultat és modifica notablement, és comporta ara com una partícula!

Podríem pensar que el detector que hem posat sobre cada forat era massa brusc i "obligava" al electró a modificar el seu comportament (fixem-nos que un possible detector seria una emissió de fotons).

Si anem fent l'experiment amb rajos de llum que tenen longitud d'ona cada cop més llarga la interferència amb els electrons serà cada cop menor ja que la seva energia és més petita.

En aquest cas, cada nova gràfica s'aproximarà més a la gràfica d'una ona.

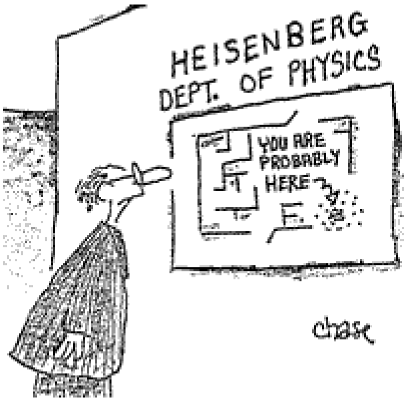
Què podem extreure de tot això? Doncs que un e^- pot comportar-se com ona o com a partícula, és a dir, un e^- és una **ona-partícula**.

El principi incertesa de Heisenberg

Al no poder saber el comportament exacte d'un e^{-} un observa que tampoc s'ha pogut seguir la pista, o més ven dit, el camí recorregut per aquest e^{-}. I no és per problemes tècnics, no l'hem pogut seguir per el doble efecte ona-partícula. Si intentem saber per on va, deixa de ser com una ona i és comporta com una partícula; i si el deixem lliure sense preguntar-li el camí que segueix l'e^{-} per el comportament de partícula i es comporta com una ona.

Així doncs, **el principi d'incertesa de Heisenberg** ens diu que al mesurar la posició d'una partícula (per exemple en l'eix de les x's) no podem conèixer amb exactitud el comportament del seu moment lineal (en el exemple el p_x). Aquest error bé donat per l'expressió $\Delta p_x \in \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot m \pm \frac{h}{4\pi \cdot \Delta x}\right]$ on $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ j/s$ és la constant de Planck.

Proposició: Tot plegat ens està dient que $\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{4\pi}$. És a dir, la capacitat de conèixer amb exactitud posició i moment d'una partícula està lligat a una restricció forta de caire natural i no instrumental.



El gat de Schrodinger

Anem a explicar un altre experiment; més que un experiment és una explicació de com pot arribar a ser de complicada la quàntica.

Suposem que tenim un gat tancat a una caixa. En un costat d'aquesta caixa hi ha dues ampolles; una de verí i l'altra d'antídot del verí. Si la ampolla de verí s'obra el gat mor immediatament i si s'obra l'altra el gat segueix viu. Ara introduïm un mecanisme amb dos ranures i que només detecta electrons. Quan un electró passa per una escletxa la ampolla de verí es trenca i si passa per l'altra es trenca la del antídot.

Ara fem passar un electró, que haurà passat? Doncs no ho podem saber sense obrir la caixa, ja que l'electró passarà pels dos forats, per cap o només per un.

Aquesta indeterminació fa que la quàntica tendeixi a calcular-ho tot amb l'ajuda de la probabilitat.

Bases de la quàntica

Abans que res, avisar-vos que no cal que ens espantem pels nombres següents, trobarem una forma més "senzilla" de fer càlculs. Aquesta forma de calcular la introduirem al següent punt, però només les mencionarem.

Proposició: Postulats i el llenguatge de la mecànica quàntica:

1. La probabilitat P d'un succés en un experiment és donada pel quadrat del mòdul d'un nombre complex Φ anomenat **amplitud de probabilitat**: $P = |\Phi|^2$
2. Si existeixen vies alternatives l'amplitud de probabilitats és la suma de les amplituds de probabilitats individuals i la probabilitat és el mòdul de la suma al quadrat: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_n$; $P = |\Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_n|^2$
3. Si fem desaparèixer la indeterminació i les interferències la probabilitat és la suma quadràtica de les amplituds: $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 + P_2 + \cdots + P_n$

Si fem una mica d'estudi estadístic, podríem acabar deduint que un electró té llibertat de "voluntat" per escollir el camí que tria. Això ja ho havíem dit amb "l'experiment" del gat, però ara amb bels postulats si calculem els recorreguts (això comporta fer experiments) podríem veure que tot succés és factible, i que el més probable és la intersecció de tots els camins.

Però qui és aquest nombre complex Φ?

Doncs fent servir els postulats i després de l'ús d'eines de la matemàtica probabilística obtindríem $\Phi[\overrightarrow{r(t)}] = K \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} S[\overrightarrow{r(t)}]}$ on $\overrightarrow{r(t)}$ és la funció de les trajectòries, $S[\overrightarrow{r(t)}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{r},\ \vec{v},\ \vec{t})dt$ on L és l'acció de la trajectòria.

Bra-ket

Com hem vist fins ara, el càlcul en la quàntica és basa sobretot en la probabilitat. En apunts més avançats podríem escriure sobre probabilitat. Però simplificarem la feina i enunciarem una notació “més” bona per fer càlculs. Només introduirem la nomenclatura general, ja que per fer-ho bé requerim de més eines matemàtiques.

Doncs bé, sabem que donat un nombre complex és pot expressar com $z = x + yi$ o bé pel seu angle i argument; $r = \arg(z)$ i $\theta = arctg(\frac{y}{x})$

Anomenem un **bra** com la matriu fila i ho denotem com: $< z| = (z_1 \ \ z_2 \ \ z_3 \ \ z_4)$. Definim un **ket** com la matriu columna i ho denotem com: $|z >= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$. El **bra-ket** serà un nombre que ens donarà una proporció de la probabilitat que busquem i requereix d’una matriu. A més podem fer un altre càlcul que dóna una matriu del producte d’un bra i d’un ket, $|z > \cdot < z| = \begin{pmatrix} z_1^2 & z_1 \cdot z_2 & z_1 \cdot z_3 \\ z_2 \cdot z_1 & z_2^2 & z_2 \cdot z_3 \\ z_3 \cdot z_1 & z_3 \cdot z_2 & z_3^2 \end{pmatrix}$.

Amb aquesta matriu, o amb altres anomenades operadors de Hamilton, podrem arribar a les probabilitats i les freqüències que busquem. I tots sabem que els càlculs de matrius són senzills, molts cops llargs, però senzills.

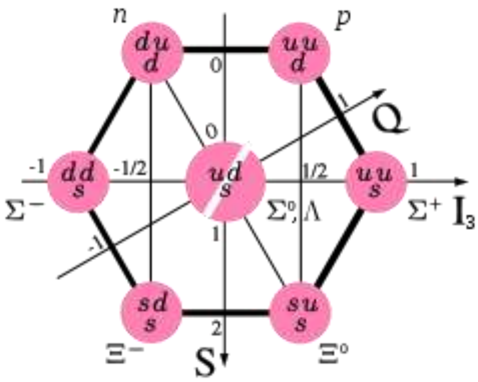
Simetries

En matemàtiques existeixen uns conjunts anomenats grups de Lie. Aquests grups són grups de simetries anomenades *gauge* i estan relacionades estretament amb la quàntica.

Abans que iniciar-nos a aquest apartat hem de definir uns quants conceptes. Definim **espín** o moment angular intrínsec d'una partícula com el moment angular de valor constant, no està relacionat amb el gir directe de la partícula en qüestió sinó en una entitat interna de cada partícula.

Definim **fermió** com el component de la matèria que té espín fraccionari. Els **quark** (tenim 6 quarks i 6 antiquarks) i els **leptons** (6 i 6 d'antipartícules) són els fermions elementals (en podem trobar de més tipus). Anomenem **bosó** aquelles partícules elementals amb espín enter.

Així doncs podem crear un grup amb aquests (i altres) elements. Com a mínim tindríem 24 elements. Aquest grup s'anomena **gauge** i és un grup de simetries.



És un grup molt compleix i requereix una rama de les matemàtiques anomenada geometria diferencial (on inicia l'estudi exhaustiu de la curvatura d'objectes).

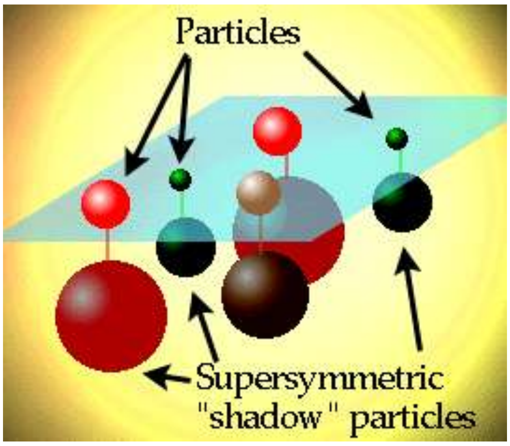
Com ja hem dit anteriorment, els complexes són els nombres amb que denotem tots els fenòmens de la quàntica, així doncs, per fer-vos una idea, imagineu fer una geometria amb derivades parcials, integrals curvilínies, nombres complexes, matrius infinites... Segur que ja teniu ganes d'estudiar-ho.

Tot i ser complicada la teoria es pot extreure molta informació útil a la vida quotidiana.

La gran teoria unificada

Per finalitzar aquests apunts només nombrar la teoria GUT (Great Unified Theory). Aquesta teoria està lligada amb el gauge i les partícules que es defineixen com $U(1)xU(2)xU(3)$.

Els científics estan intentant buscar una simetria amb les quatre forces de l'univers; aquesta teoria l'anomenen SUSY (SUper SYmmetry). Aquesta teoria postula que per cada partícula està dotada d'una partícula simètrica respecte el seu espín, i l'anomenen spartícula.



Gràcies aquesta nova teoria i càlculs ja s'han pogut unir tres forces, però tot falla quan intentem unir la gravetat.

Incís: els grups de Lie són una varietat diferencial ("derivable")(casi sempre) on els seus elements formen un grup amb operacions diferenciables. El grup de Lie més senzill que podem conèixer és la circumferència dels complexos de radi 1, anomenada matemàticament com $S^1 = \{z : z \in \mathbb{C}\ i\ \left||z|\right| = 1\}$.

Imatges

Totes les imatges s'han extret de *google* amb el filtre de *Etiquetes per a la reutilització no comercial*.